ECOLE NATIONALE DU GENIE DE L'EAU ET DE L'ENVIRONNEMENT DE STRASBOURG

CONCOURS D'ENTREE 1994

PREMIERE EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures.

N.B. : Ce sujet comporte 3 pages de texte.
Les calculatrices sont interdites.

Dans les parties I, II et III de ce problème, on considère une succession d'un nombre aléatoire N d'épreuves indépendantes, chaque épreuve n'ayant que deux résultats possibles "succès" ou "échec" ; la probabilité de succès à une épreuve est notée p, celle d'échec q. On suppose : $p \in]0, 1[$ et on a $p+q=1$.

Le nombre d'épreuves N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note X la variable aléatoire égale au nombre de succès, et Y la variable aléatoire égale au nombre d'échecs parmi les N épreuves.

La partie IV traite d'une généralisation de cette situation au cas des variables aléatoires à densité. Cette partie IV est indépendante des trois premières parties.

I. Détermination directe de la loi de X dans des cas particuliers.

1. On suppose dans cette question que N suit une loi de Poisson de paramètre λ ($\lambda > 0$).

   a. Calculer la probabilité conditionnelle de l'événement $(X=k)$ sachant l'événement $(N=n)$. (distinguer les cas $n \geq k$ et $n < k$).
   En déduire la valeur de la probabilité $Pr(X=k)$. Montrer que X suit une loi usuelle, que l'on identifiera. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?

   b. Que vaut la somme $X+Y$? Calculer la probabilité $Pr\left((X=k) \cap (Y=j)\right)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer la covariance et le coefficient de corrélation linéaire des variables aléatoires X et N.

2. On suppose dans cette question que N suit une loi donnée par :

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $Pr(N=n) = b.a^n$ (a, b réels, $a \in]0,1[$, $a+b=1$).

   a. Soit k un entier positif donné. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k u^n$? $\left(\text{On note } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}\right)$.
   Calculer la somme de cette série, en utilisant les séries dérivées de la série géométrique.

   b. Déterminer la loi des variables aléatoires X et Y.

   c. Calculer la probabilité $Pr\left((X=k) \cap (Y=j)\right)$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ? Calculer la covariance du couple (X,Y).

II. Utilisation de fonctions génératrices.

Etant donné une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$, on note F_Z la fonction génératrice de Z.
Si Z_1 et Z_2 sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, on définit la fonction génératrice du couple (Z_1,Z_2), notée $F_{(Z_1,Z_2)}$, par : $\forall (s,t) \in [0,1]^2$

$$F_{(Z_1,Z_2)}(s,t) = \sum_{i=0}^{+\infty} \left[\sum_{j=0}^{+\infty} Pr\left((Z_1=i) \cap (Z_2=j)\right) s^i t^j \right], \text{ ou par la formule équivalente}$$

$$F_{(Z_1,Z_2)}(s,t) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left[\sum_{i=0}^{+\infty} Pr\left((Z_1=i) \cap (Z_2=j)\right) s^i t^j \right].$$

Préliminaires : Montrer que si les variables aléatoires Z_1 et Z_2 sont indépendantes, alors : $\forall (s,t) \in [0,1]^2$, $F_{(Z_1,Z_2)}(s,t) = F_{Z_1}(s)\, F_{Z_2}(t)$.

On admet la réciproque de cette proposition dans la suite du problème.

1. Déterminer la fonction génératrice du couple (X,Y) défini dans l'en-tête du problème, au moyen de la fonction génératrice F_N de la variable aléatoire N.

2. En déduire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes si et seulement si F_N vérifie l'équation fonctionnelle :

   (E) $\forall (x,y) \in [0,1]^2$, $F_N(q+px)\, F_N(p+qy) = F_N(px+qy)$.

3. Redémontrer, grâce à (E), les résultats des questions I.1.b. et I.2.c.

III. Etude d'une réciproque.

Le but de cette partie est la démonstration d'une réciproque partielle du résultat I.1., sous la forme suivante :

| On suppose que $p=q=1/2$ et que N admet une espérance.
| Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors la variable aléatoire
| N suit une loi de Poisson.

On admettra sans démonstration que la fonction F_N est continue à gauche au point 1, ainsi que sa dérivée F'_N.

a. En utilisant II.2., écrire une équation fonctionnelle vérifiée par la fonction F_N ; en déduire une équation vérifiée par la fonction

$$x \longrightarrow H(x) = \frac{F'_N(x)}{F_N(x)}.$$

b. Démontrer : $\forall\, x \in]0,1]$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $H\left(\frac{x+2^n-1}{2^n}\right) = H(x)$.

c. En déduire que H est constante.

d. Conclure.

IV. Généralisation aux variables aléatoires à densité.

On considère une suite de variables aléatoires N, X_1, X_2, ..., X_n, ..., telles que, pour tout entier strictement positif n, $n \in \mathbb{N}^*$, les variables aléatoires N, X_1, ..., X_n sont mutuellement indépendantes. N est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, suivant la loi définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $Pr(N=n) = b.a^{n-1}$ $(a \in]0,1[,\ a+b=1)$.

Toutes les variables aléatoires X_i admettent la même fonction de densité f telle que :

$\forall\, x \geq 0$, $f(x) = \alpha\, e^{-\alpha x}$ (α constante, $\alpha > 0$).
$\forall\, x < 0$, $f(x) = 0$.

On note S la variable aléatoire égale à la somme $X_1+X_2+\ldots+X_N$.

1. Déterminer une fonction de densité de la variable aléatoire X_1+X_2, puis établir par récurrence l'expression d'une fonction de densité de la variable aléatoire $X_1+X_2+\ldots+X_n$ (n entier fixé).

2. Exprimer la fonction de répartition de S, en utilisant les probabilités conditionnelles $Pr(S \leq x \mid (N=n))$. En déduire l'expression de la fonction de répartition et d'une fonction de densité de S. Calculer l'espérance E(S) de la variable aléatoire S, et la comparer au produit $E(X_1)E(N)$.

CONCOURS D'ENTREE 1994

DEUXIEME EPREUVE DE MATHEMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES

DUREE : 3 heures.

N.B. : Ce sujet comporte 3 pages de texte.

I

On considère pour tout α paramètre réel, la fonction y_α de la variable réelle $x \geq 0$ donnée par : $y_\alpha(x) = x^{\alpha x}$ si $x > 0$ et par $y_\alpha(0) = 1$
$\ln$ désigne la fonction logarithme népérien.

1. a. Vérifier que y_α est continue sur $\mathbb{R}_+ = [0\ ,\ +\infty[$.

   b. Etudier la fonction $x \longrightarrow x\ln x$ pour $x > 0$.

   c. Soit $\varepsilon > 0$, démontrer qu'il existe un réel $\eta > 0$ tel que pour tout h, $|h| < \eta$ on a pour tout x, $0 \leq x \leq 1$, l'inégalité : $|y_{\alpha+h}(x) - y_\alpha(x)| < \varepsilon$.
   (On appliquera la formule des accroissements finis à $\alpha \longrightarrow x^{\alpha x}$).

2. On suppose $\alpha > 0$.

   a. Etudier y_α ; construire, dans un repère orthonormé, l'allure de son graphe C_α en précisant les tangentes en $x = 0$ et $x = 1$.

   b. Représenter (s'inspirer de la question précédente) l'allure du graphe $C_{-\alpha}$ de $y_{-\alpha}$ (*ne pas chercher les points d'inflexion*).

c. On considère $I_\alpha = \int_0^{\frac{1}{\alpha}} x^{\alpha x}dx$ et $J_\alpha = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{e}} x^{\alpha x}dx$

Justifier avec soin que les limites de ces intégrales quand α tend vers $+\infty$ sont nulles.

On admettra que $\int_{\frac{1}{e}}^1 x^{\alpha x}$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$.

II

Soit l'intégrale $\int_0^1 x^{\alpha x}dx$ de valeur $F(\alpha)$,si elle existe.

1. Trouver le domaine de définition de $\alpha \xrightarrow{F} F(\alpha)$.

2. a. Démontrer que F, ainsi définie, est continue.

b. Démontrer, sans chercher à dériver F, que F est monotone ; préciser son sens de variation. Démontrer que $F(\alpha)F(-\alpha) \geq 1$ pout tout α.

c. Calculer les limites suivantes :
(i) $\lim_{\alpha \to +\infty} F(\alpha)$;

(ii) $\lim_{\alpha \to -\infty} F(\alpha)$;

(iii) $\lim_{\alpha \to -\infty} \frac{F(\alpha)}{\alpha}$.

d. En étudiant $\frac{F(\alpha+h)-F(\alpha)}{h} - \int_0^1 x\ell n(x)y_\alpha(x)dx$, où $h \neq 0$, démontrer que $F'(\alpha)$ existe puis retrouver le sens de variation de F (Cf.I.2.b.). Prouver de même que $F''(\alpha)$ existe et trouver son signe.

e. Construire schématiquement le graphe de F dans un repère orthonormé.

III

On pose $I(r,s) = \int_0^1 x^r \left(\ell n \frac{1}{x}\right)^s dx$ où r et s sont des nombres réels.

1. Soit $0 < a < 1$; déterminer les valeurs de s telles que l'intégrale $\int_a^1 x^r \left(\ell n \frac{1}{x}\right)^s dx$ soit convergente pour tout r.

2. Démontrer que pour β réel, $\gamma > 1$ et $b > 1$ réels, l'intégrale $\int_b^{+\infty} \frac{(\ell n\ x)^\beta}{x^\gamma} dx$ est convergente.

3. En déduire que si $s > -1$ et $r > -1$, l'intégrale $I(r,s)$ est définie.

4. Démontrer que $I(r,s) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-(r+1)x} dx = \frac{1}{(r+1)^{s+1}} I(0,s)$.

5. Soit $s > 0$. Trouver une relation simple entre $I(0,s)$ et $I(0,s-1)$; en déduire la valeur de $I(r,n)$ où n est un entier naturel.

IV

1. a. Démontrer que $\alpha \to x^{\alpha x}$, x fixé entre 0 et 1, admet en 0 un développement en série entière de la variable α, de rayon de convergence infini.

b. On écrit ce développement : $x^{\alpha x} = \sum_{k=0}^{n} a_k(x)\alpha^k + R_n(x,\alpha)$, où $R_n(x,\alpha)$ est le reste à l'ordre n de la série. Majorer $|R_n(x,\alpha)|$ en fonction de α et n uniquement.

2. a. En déduire, pour des valeurs de α à préciser, que
$$F(\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^n}{(n+1)^{n+1}}$$

b. Retrouver le fait que F est dérivable et même de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$.